Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

Л.П. Паршев, А.В. Калинкин

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Л.П. Паршев, А.В. Калинкин

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*Методические указания
к выполнению типового расчета*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2011

УДК 517.95
ББК 22.161.6
П18

Рецензент *В.В. Феоктистов*

Паршев Л.П.

П18 Уравнения в частных производных первого порядка : метод. указания к выполнению типового расчета / Л.П. Паршев, А.В. Калинкин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 27, [1] с. : ил.

Представлены необходимые теоретические сведения и методические указания к решению квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Приведены соответствующие примеры, даны условия типового расчета.

Для студентов факультетов РК, ФН.

Рекомендовано Учебно-методической комиссией НУК ФН МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 517.95
ББК 22.161.6

Учебное издание

Паршев Леонид Петрович
Калинкин Александр Вячеславович

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Редактор *В.М. Царев*
Корректор *О.К. Юрьев*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 26.09.2011. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 1,63. Тираж 400 экз. Изд. № 3.
Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.

В методических указаниях рассмотрены квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка для функции с двумя независимыми переменными. Описан метод системы характеристик для построения общего решения и решения задачи Коши. К квазилинейным уравнениям с n независимыми переменными также применим метод характеристик; примеры решения других типов уравнений с частными производными первого порядка можно найти в справочнике [4]. Для решения задач типового расчета необходимо обратиться к учебной литературе [1—3], где даны доказательства используемых теорем.

1. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Общий вид квазилинейного уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u), \tag{1}$$

где $u = u(x, y)$ — искомая функция; $P(x, y, u)$, $Q(x, y, u)$ и $R(x, y, u)$ — непрерывные в рассматриваемой области изменения переменных функции, не обращающиеся в нуль одновременно.

В теории интегрирования уравнений в частных производных устанавливается эквивалентность между такими дифференциальными уравнениями с частными производными первого порядка и некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения этой системы называют характеристиками, они играют первостепенную роль в теории интегрирования уравнений в частных производных.

2. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций, называется *нормальной системой дифференциальных уравнений*. Нормальная система дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $y_1(t)$ и $y_2(t)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2), \end{cases} \tag{2}$$

где f_1 и f_2 — функции.

Решением системы называется пара функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$, подстановка которых в уравнения (2) обращает эти уравнения в тождества.

Говорят, что *задача Коши* решена, если найдено решение системы (2), удовлетворяющее начальным условиям, т. е. при $t = t_0$,

$$y_1(t_0) = y_1^0, \qquad y_2(t_0) = y_2^0. \tag{3}$$

Любое решение задачи Коши называют *частным решением* системы (2), множество всех частных решений — *общим решением* системы (2). Общее решение — это множество пар функций, зависящих от двух произвольных постоянных C_1 и C_2,

$$\begin{cases} y_1 = y_1(t, C_1, C_2), \\ y_2 = y_2(t, C_1, C_2). \end{cases} \tag{4}$$

В системе координат t, y_1, y_2 решение $y_1(t)$, $y_2(t)$ изображается линией, называемой *интегральной кривой* (рис. 1). Через каждую точку M_0 пространства, в которой выполняются условия существования и единственности решения (теорема Коши), проходит единственная интегральная кривая.

Часто не удается получить явное выражение y_1 и y_2 через t, но может быть найдена некоторая зависимость t, y_1, y_2. Соотношение вида

$$\psi(t, y_1, y_2) = C, \tag{5}$$

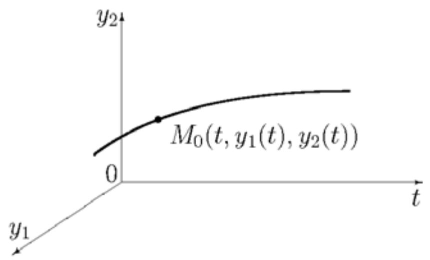

Рис. 1

в левой части которого стоит функция, неравная тождественно постоянной, но становящаяся постоянной, если вместо аргументов y_1 и y_2 подставить любое решение системы $y_1(t)$, $y_2(t)$, называется *первым интегралом* системы (2). Иначе говоря, $\psi(t, y_1(t), y_2(t)) \equiv C$, если $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решение системы (2) . Совокупность двух независимых первых интегралов

$$\begin{cases} \psi_1(t, y_1, y_2) = C_1, \\ \psi_2(t, y_1, y_2) = C_2 \end{cases} \tag{6}$$

называется *общим интегралом* системы.

Если найден один первый интеграл, то одну из искомых функций можно выразить через другую функцию и аргумент. Это позволяет уменьшить количество уравнений в системе на единицу. Совокупность двух независимых первых интегралов равносильна общему решению системы.

Уравнение $\psi_1(t, y_1, y_2) = C_1$ при каждом значении C_1 задает поверхность (рис. 2); меняя значения постоянной C_1, получаем однопараметрическое семейство поверхностей.

Т е о р е м а 1. *Если интегральная кривая системы* (2) *и поверхность, задаваемая первым интегралом, имеют общую точку, то вся эта интегральная кривая лежит на этой поверхности.*

Так как через каждую точку поверхности можно провести интегральную кривую, то поверхность можно представить как бы составленной из интегральных кривых (рис. 2).

Если найден еще один первый интеграл, независимый от предыдущего, то образуются поверхности другого семейства, $\psi_2(t, y_1, y_2) = C_2$.

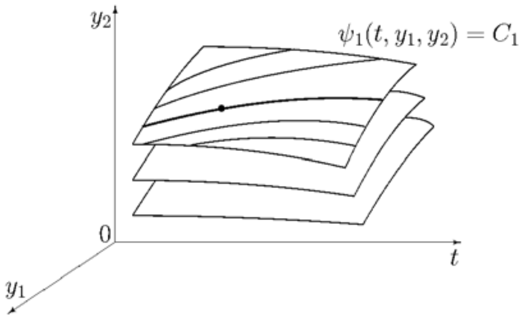

Рис. 2

Пересечение любой пары поверхностей, определяемых двумя независимыми первыми интегралами, есть интегральная кривая, поскольку интегральная кривая, проведенная через любую точку линии пересечения поверхностей, должна целиком лежать в каждой из поверхностей одновременно (рис. 3).

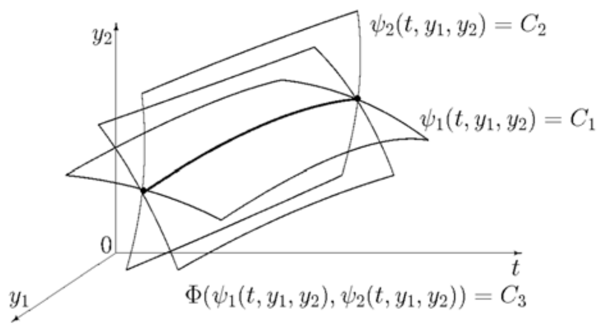

Рис. 3

Зная два независимых первых интеграла системы, можно найти бесчисленное множество первых интегралов, являющихся их следствиями. Например, соотношение

$$\Phi(\psi_1(t, y_1, y_2), \psi_2(t, y_1, y_2)) = C_3,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция также является первым интегралом. Если $\Phi(C_1, C_2) = C_3$, то определяемая им поверхность проходит через линию пересечения поверхностей $\psi_1(t, y_1, y_2) = C_1$ и $\psi_2(t, y_1, y_2) = C_2$ (см. рис. 3). Следовательно, через интегральную кривую можно провести бесчисленное множество поверхностей, соответствующих разным первым интегралам.

В процессе решения задачи иногда в качестве независимой переменной приходится выбирать одну из искомых функций. Соотношения (6), дающие общий интеграл системы, сохраняют свою силу, поскольку в них независимая и зависимые переменные входят равноправно. Но при такой замене переменных изменится вид системы (2), так как в нее входят производные. Если же написать уравнения с помощью дифференциалов, то система сохранит свой вид при любой замене переменных:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dy_1}{f_1(t,x,y)} = \frac{dy_2}{f_2(t,x,y)}.$$

Эта система останется равносильной первоначальной, если все знаменатели умножить на один и тот же множитель (не обращающийся в нуль). Тогда несимметрия переменных заметна лишь в обозначениях. Вместо переменных t, y_1, y_2 введем переменные x, y, u. Система дифференциальных уравнений в симметричной форме имеет вид

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}. \tag{7}$$

Общий интеграл этой системы запишется в виде

$$\begin{cases} \psi_1(x,y,u) = C_1, \\ \psi_2(x,y,u) = C_2. \end{cases}$$

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В трехмерном пространстве (x,y,u) решение уравнения

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u)$$

задает поверхность $u = u(x,y)$, которую будем называть *интегральной поверхностью*.

Заданные функции $P(x,y,u)$, $Q(x,y,u)$ и $R(x,y,u)$ определяют векторное поле в этом пространстве:

$$\vec{F} = P(x,y,u)\vec{i} + Q(x,y,u)\vec{j} + R(x,y,u)\vec{k}, \tag{8}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат.

Векторные линии поля находят из условия коллинеарности вектора

$$\vec{\tau} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}du,$$

направленного по касательной к искомым линиям, и вектора поля $\vec{F}$. Это семейство линий получается в результате интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}. \tag{9}$$

Величины $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и -1 пропорциональны направляющим косинусам нормали к искомой поверхности $u = u(x,y)$, и уравнение (1) выражает условие перпендикулярности

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R(-1) = 0$$

нормали $\vec{N}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, -1\Big)$ к искомой поверхности с вектором поля $\vec{F}$. Другими словами, в каждой точке искомой поверхности $u = u(x,y)$ вектор поля $\vec{F}$ находится в касательной плоскости к поверхности (рис. 4).

Линии, определяемые системой (9), называются *характеристиками уравнения* (1), сама система (9) есть *уравнения характеристик*.

Если некоторая поверхность $u = u(x,y)$ образована линиями l, которые удовлетворяют системе (9), то в каждой точке этой поверхности касательная к линии l, проходящей через данную точку, лежит в касательной плоскости к поверхности и, следовательно, эта поверхность удовлетворяет уравнению (1), т. е. является интегральной поверхностью этого уравнения. Таким образом, если поверхность $u = u(x,y)$ образована характеристиками уравнения (1), то эта поверхность есть интегральная поверхность уравнения.

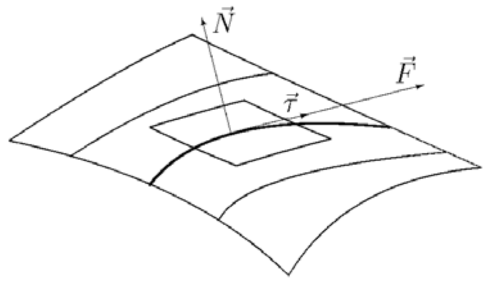

Рис. 4

Наоборот, если некоторая гладкая поверхность удовлетворяет уравнению (1) (т. е. является интегральной поверхностью), то ее можно покрыть характеристиками.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Т е о р е м а 2. *Задача интегрирования квазилинейного неоднородного* (*с правой частью*) *уравнения*

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u)$$

сводится к задаче интегрирования линейного однородного уравнения первого порядка относительно неизвестной функции $v(x,y,u)$ *с тремя независимыми переменными*:

$$P(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial y}+R(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0, \qquad (10)$$

если искать решение уравнения (1) *в неявном виде* $v(x,y,u)=0$. *Каждое решение уравнения* (10)*, содержащее* u *и приравненное к нулю, дает соотношение* $v(x,y,u)=0$*, которое определит функцию* $u(x,y)$*, удовлетворяющую уравнению* (1).

Геометрически это означает, что интегральная поверхность $u=u(x,y)$ представляется как поверхность уровня $v(x,y,u)=0$ функции трех переменных $v(x,y,u)$.

Действительно, если $v(x, y, u(x, y)) = 0$, когда $u = u(x, y)$ — решение уравнения (1), то

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}.$$

Подставляя $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ в уравнение (1), получаем (10).

Составим уравнения характеристик для уравнения (1):

$$\frac{dx}{P(x, y, u)} = \frac{dy}{Q(x, y, u)} = \frac{du}{R(x, y, u)}.$$

Они также называются уравнениями характеристик для уравнения (10) и совпадают с системой уравнений (9).

Задачи интегрирования уравнения (10) и системы уравнений (9) — задачи эквивалентные. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Левая часть любого первого интеграла системы уравнений* (9) *есть решение уравнения* (10); *всякое решение уравнения* (10), *приравненное к произвольной постоянной, дает первый интеграл системы* (9).

Если функции $\psi_1(x, y, u)$ и $\psi_2(x, y, u)$ — частные решения уравнения (10), т. е. являются левыми частями двух независимых первых интегралов системы (9), то функция $\Phi(\psi_1(x, y, u), \psi_2(x, y, u))$ дает общий вид решения уравнения (10). Здесь Φ — произвольная дифференцируемая функция двух переменных. Тогда соотношение

$$\Phi(\psi_1(x, y, u), \psi_2(x, y, u)) = 0 \tag{11}$$

задает в неявной форме общий вид решения уравнения (1).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - y^2.$$

Р е ш е н и е. Составим уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-x^2 - y^2}.$$

Первое уравнение этой системы можно решить отдельно от второго, так как оно не содержит u (переменная u, стоящая в знаменателях левой и правой частей этого уравнения, сокращается). Из равенства

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

получаем интегрированием $\ln|x| = \ln|y| + \ln C$, откуда находим первый интеграл системы

$$\frac{y}{x} = C_1.$$

Второе уравнение этой системы

$$\frac{dx}{xu} = \frac{du}{-x^2 - y^2}$$

содержит все три переменные. Чтобы исключить переменную y, воспользуемся найденным первым интегралом. Так как искомая интегральная кривая лежит на одной из поверхностей, заданных найденным первым интегралом, в каждой точке этой кривой $y = C_1 x$ (значение константы C_1 одинаково во всех точках искомой интегральнной кривой, но может отличаться, если перейти на другую интегральную кривую). Заменим во втором уравнении y на $C_1 x$, после преобразований получим

$$-(1 + C_1^2)x\,dx = u\,du.$$

Интегрируя, находим зависимость $(1 + C_1^2)x^2 + u^2 = C_2$. Это соотношение, содержащее C_2, не является первым интегралом, поскольку содержит также произвольную постоянную C_1. Учитывая, что для найденной кривой $C_1 = \dfrac{y}{x}$, перепишем соотношение в виде

$$x^2 + y^2 + u^2 = C_2.$$

В этой форме записи соотношение выполняется для любой из интегральных кривых, т. е. является первым интегралом.

Общее решение уравнения первого порядка имеет вид (в неявной форме)

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + u^2\right) = 0,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция. Из последнего выражения возможно получить решение в явной форме:

$$u = \pm\sqrt{f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2},$$

где f — произвольная дифференцируемая функция.

З а м е ч а н и е. При нахождении первых интегралов системы, записанной в симметричной форме, для получения интегрируемых комбинаций часто используют *производные пропорции*, например

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

В приведенном выше примере перепишем систему в виде

$$\frac{x\,dx}{x^2} = \frac{y\,dy}{y^2} = \frac{u\,du}{-x^2 - y^2},$$

затем воспользуемся производной пропорцией, сложив числители и знаменатели первого и второго отношений:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{x\,dx}{x^2} = \frac{y\,dy}{y^2} = \frac{u\,du}{-x^2 - y^2}.$$

Сравнивая первое отношение с последним, получаем

$$x\,dx + y\,dy = -u\,du,$$

отсюда первый интеграл $x^2 + y^2 + u^2 = C_2$.

5. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ (ЗАДАЧА КОШИ)

Для того чтобы из бесконечного множества решений, заданных формулой (11), выделить одно определенное, надо найти функцию Φ, входящую в решение. Это можно сделать при наличии дополнительных условий. Сформулируем задачу о нахождении частного решения уравнения (1) — *задачу Коши*.

Вдоль некоторой кривой L_1 плоскости (x, y) заданы значения искомой функции

$$\begin{cases} y = f(x), \\ u = g(x), \end{cases} \tag{12}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Найти такое решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) в окрестности линии L_1, чтобы $u = u(x, f(x)) = g(x)$.

Геометрическая иллюстрация задачи Коши: через пространственную кривую L с непрерывно изменяющейся касательной (гладкую кривую) провести интегральную поверхность уравнения (1) (рис. 5).

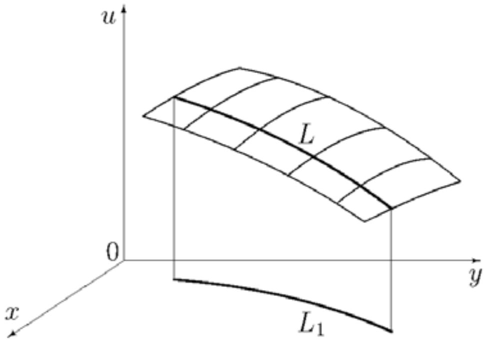

Рис. 5

Линия L может быть задана в более общем виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(\sigma), \\ y = \varkappa(\sigma), \\ u = \chi(\sigma). \end{cases} \tag{13}$$

Первые два из уравнений (13) задают кривую L_1 в параметрическом виде, все три уравнения задают в пространстве (x, y, u) кривую L, для которой L_1 является проекцией на плоскость (x, y). В этом случае должно выполняться условие $u(\varphi(\sigma), \varkappa(\sigma)) = \chi(\sigma)$.

Геометрическое решение поставленной задачи Коши очевидно: через каждую точку заданной линии L надо провести характеристику. Множество характеристик, проходящих через все точки линии L, образуют искомую интегральную поверхность (см. рис. 5).

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,u)} = \frac{dy}{Q(x,y,u)} = \frac{du}{R(x,y,u)}$$

может быть проинтегрирована без знания интегральной поверхности. Общий интеграл системы

$$\begin{cases} \psi_1(x,y,u) = C_1, \\ \psi_2(x,y,u) = C_2 \end{cases}$$

задает семейство характеристик (зависящее от двух параметров C_1 и C_2), обладающее следующим свойством: через каждую точку области, где выполнены условия существования и единственности решения, проходит одна характеристика. Постоянные C_1 и C_2 независимы, каждой из них можно придавать любые значения; двухпараметрическое семейство характеристик получается в результате пересечения каждой поверхности одного семейства с каждой поверхностью другого (рис. 6).

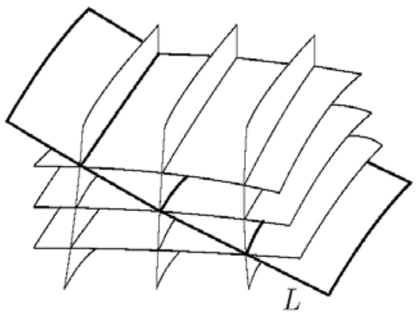

Рис. 6

Из всех поверхностей, задаваемых первыми интегралами, нам надо оставить только такие пары поверхностей, линии пересечения которых проходят через точки линии L; для этого следует научиться соответствующим образом подбирать пары C_1 и C_2. Другими словами, между произвольными постоянными C_1 и C_2 в общем интеграле системы надо установить некоторую зависимость $\Phi(C_1, C_2) = 0$.

Через каждую точку линии L можно провести поверхность из семейства $\psi_1(x, y, u) = C_1$. Подставляя координаты этой точки, заданные как функции параметра σ, в уравнение поверхности, устанавливаем зависимость между значением постоянной C_1, определяющей поверхность, и значением параметра σ, соответствующего точке пересечения линии L с этой поверхностью:

$$C_1 = \psi_1(\varphi(\sigma), \varkappa(\sigma), \chi(\sigma)) = C_1(\sigma). \tag{14}$$

Аналогичное соотношение

$$C_2 = \psi_2(\varphi(\sigma), \varkappa(\sigma), \chi(\sigma)) = C_2(\sigma) \tag{15}$$

дает зависимость между параметром σ точки кривой L и постоянной C_2 поверхности другого семейства, пересекающей линию L в этой точке. Любая пара значений C_1 и C_2, вычисленных по формулам (14) и (15) для одного значения σ, определит пару поверхностей, линия пересечения которых (характеристика) проходит через точку линии L, соответствующую этому значению σ. Следовательно, формулы (14) и (15), взятые вместе, задают в параметрической форме искомую зависимость между C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = C_1(\sigma), \\ C_2 = C_2(\sigma). \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(x, y, u) = C_1(\sigma), \\ \psi_2(x, y, u) = C_2(\sigma) \end{cases} \tag{17}$$

задает семейство характеристик, проходящих через линию L. Это семейство характеристик, зависящее от одного параметра σ, и образует искомую интегральную поверхность (решение задачи Коши).

Исключая из уравнений (16) параметр σ, можно получить зависимость вида

$$\Phi(C_1, C_2) = 0. \tag{18}$$

Соответственно решение задачи Коши будет представлено как

$$\Phi(\psi_1(x, y, u), \psi_2(x, y, u)) = 0. \tag{19}$$

Для исключения σ следует разрешить, например, уравнение (14) относительно σ и подставить выражение $\sigma(C_1)$ в левую часть соотношения (15). Это возможно, когда в левые части уравнений (14) и (15) входит σ.

Если вся кривая L лежит, например, на поверхности $\psi_1(x, y, u) = C_1^0$, то соотношение

$$\psi_1(\varphi(\sigma), \varkappa(\sigma), \chi(\sigma)) = C_1^0$$

нельзя разрешить относительно параметра σ. Но тогда сама эта поверхность $\psi_1(x, y, u) = C_1^0$ есть искомая в задаче Коши интегральная поверхность.

Наконец, если заданная кривая L лежит одновременно на двух поверхностях разных семейств

$$\psi_1(x, y, u) = C_1^0, \qquad \psi_2(x, y, u) = C_2^0,$$

то она сама есть характеристика, а параметр σ не входит ни в одно из соотношений (14), (15). Задача Коши становится неопределенной, так как каждая характеристика принадлежит бесконечному множеству интегральных поверхностей. Действительно, если только постоянные C_1^0 и C_2^0 удовлетворяют уравнению

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция, то уравнение

$$\Phi(\psi_1(x, y, u), \psi_2(x, y, u)) = 0$$

задает интегральную поверхность, проходящую через линию L. Таким образом, через заданную линию L можно провести бесчисленное множество интегральных поверхностей.

З а м е ч а н и е. Если кривая L является характеристикой, решение задачи Коши становится неопределенным. Это свойство характеристики часто берется как ее определение; исходя из него, можно получить уравнение характеристик.

П р и м е р 2. Найти интегральную поверхность уравнения

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 - y^2,$$

проходящую через кривую

$$\begin{cases} x = a, \\ u = \sqrt{y^2 + a^2}, \end{cases}$$

где a — константа.

Р е ш е н и е. В примере 1 найдены первые интегралы уравнений характеристик

$$\frac{y}{x} = C_1, \qquad x^2 + y^2 + u^2 = C_2.$$

Первое уравнение определяет множество плоскостей, проходящих через ось Oz, второе — сферы разных радиусов с центром в начале координат. Характеристики исходного уравнения в частных производных можно представить как меридианы на сферах.

В уравнениях заданной кривой за независимую переменную примем y. Подставляя в первые интегралы системы координаты точек заданной линии, выраженные через y, получим

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{y}{a}, \\ C_2 = a^2 + y^2 + (y^2 + a^2). \end{cases}$$

Отсюда $C_2 = 2a^2(1 + C_1^2)$. Заменяя в этой зависимости C_1 и C_2 функциями, стоящими в левых частях первых интегралов, находим искомое решение

$$x^2 + y^2 + u^2 = 2a^2\,\frac{x^2 + y^2}{x^2}.$$

П р и м е р 3. Найти интегральную поверхность уравнения

$$(x^2 - y^2 - u^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 2xu,$$

проходящую через кривую L: $x = 0$, $y = 2a\cos t$, $u = 2a\sin t$.

Р е ш е н и е. Интегрируем систему уравнений

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - u^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{du}{2xu}.$$

Из второго уравнения

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

получаем первый интеграл

$$\frac{u}{y} = C_1.$$

Для получения еще одного первого интеграла представим систему в виде

$$\frac{x\,dx}{x^2 - y^2 - u^2} = \frac{y\,dy}{2y^2} = \frac{u\,du}{2u^2},$$

а затем применим производную пропорцию, сложив все числители и все знаменатели отношений:

$$\frac{x\,dx + y\,dy + u\,du}{x^2 + y^2 + u^2} = \frac{dy}{2y}.$$

Таким образом, получена интегрируемая комбинация

$$\frac{d(x^2 + y^2 + u^2)}{x^2 + y^2 + u^2} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$\frac{x^2 + y^2 + u^2}{y} = C_2.$$

Найденные первые интегралы задают плоскости, проходящие через ось Ox, и сферы с центром на оси Oy, проходящие через начало координат. Характеристиками будут окружности, проходящие через начало координат, для которых ось Ox — касательная.

Искомой будет поверхность, полученная при вращении вокруг оси Ox окружности радиуса a, касающейся оси в начале координат.

Найдем уравнение этой поверхности. Подставляя координаты точек заданной линии, выраженные через t, в первые интегралы, получим

$$C_1 = \operatorname{tg} t, \qquad C_2 = \frac{2a}{\cos t}.$$

Исключив t, найдем зависимость между C_1 и C_2 $4a^2(C_1^2 + 1) = C_2^2$, а затем решение задачи Коши

$$4a^2(u^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + u^2)^2.$$

В сферических координатах ($x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta\cos\varphi$, $u = r\cos\theta\sin\varphi$) уравнение поверхности принимает вид $r = 2a\cos\theta$.

П р и м е р 4. Найти решение уравнения

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + (u^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + x = 0$$

при дополнительных условиях: а) $y = 2x^2$, $u = x$; б) $y = 1 + x^2$, $u = x$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения характеристик

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{u^2 - x^2} = \frac{du}{-x}.$$

Найдем первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{-x}; \qquad x\,dx + u\,du = 0; \qquad x^2 + u^2 = C_1.$$

Для определения следующего интеграла возьмем

$$\frac{x\,dx + u\,du}{u^2 - x^2} = \frac{dy}{u^2 - x^2}.$$

Сравнивая первое и второе отношения, получим $x\,dx + u\,du = dy$, или $d(xu) = dy$. Найден еще один первый интеграл $xu - y = C_2$.

Общее решение

$$\Phi(x^2 + u^2, xu - y) = 0.$$

а) Решая задачу Коши, за параметр σ на данной кривой удобно взять x. Подставляя в первые интегралы x, $y = 2x^2$, $u = x$, получаем $C_1 = 2x^2$, $C_2 = -x^2$. Следовательно, $C_1 = -2C_2$. Тогда частное решение имеет вид $x^2 + u^2 = -2xu + 2y$, или

$$(x + u)^2 = 2y.$$

б) Решим задачу при других начальных условиях. Подставляя выражения x, $y = 1 + x^2$, $u = x$ в первые интегралы, получим $C_1 = 2x^2$, $C_2 = -1$. Независимость C_2 от x означает, что кривая, заданная начальными условиями, лежит на поверхности $xu - y = -1$. В то же время C_1 зависит от x, значит, разным точкам заданной линии соответствуют разные поверхности первого семейства $x^2+u^2 = C_1$. Следовательно, линия, заданная начальными условиями, не является характеристикой, а $xu-y = -1$ — единственная интегральная поверхность, удовлетворяющая начальным условиям.

П р и м е р 5. Решить задачу Коши для уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy,$$

удовлетворяющего условиям $y = x$, $u = x^2$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнения характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2xy}.$$

Первое уравнение системы дает первый интеграл системы

$$\frac{x}{y} = C_1.$$

Для получения другого первого интеграла представим систему в виде

$$\frac{y\,dx}{yx} = \frac{x\,dy}{xy} = \frac{du}{2xy}$$

и применим производную пропорцию. Тогда

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{2xy} = \frac{du}{2xy},$$

откуда $d(xy) = du$ и $u - xy = C_2$.

Подставляя x, $y = x$ и $u = x^2$ в найденные первые интегралы, получим

$$C_1 = \frac{x}{x} = 1, \qquad C_2 = x^2 - x \cdot x = 0.$$

Это означает, что заданная начальными условиями кривая одновременно принадлежит интегральным поверхностям

$$\frac{x}{y} = 1, \qquad u - xy = 0.$$

Задача Коши имеет в этом случае бесконечное множество решений.

Пусть $\Phi(\alpha, \beta)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $\Phi(1, 0) = 0$, тогда $\Phi\Big(x/y, u - xy\Big) = 0$ — уравнение интегральных поверхностей, удовлетворяющих заданным начальным условиям. Его можно записать в другой форме:

$$u = xy + f\left(\frac{x}{y}\right),$$

где f — произвольная функция, удовлетворяющая условию $f(1) = 1$.

Задача имеет бесчисленное множество решений, так как заданная кривая — характеристика. Действительно, вектор $\vec{F}(P, Q, R) = (x, y, 2xy)$ вдоль заданной кривой принимает значения $(x, x, 2x^2)$. Сама заданная кривая имеет вектор касательной $(1, 1, 2x)$. Видно, что при любом x эти векторы коллинеарны.

В частном случае, когда в уравнении (1) $R(x, y, u) = 0$, уравнение

$$P(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

имеет очевидное решение: $u = C_1$; это означает, что интегральные кривые характеристической системы этого уравнения лежат в горизонтальных плоскостях. В этом случае характеристикой принято называть проекцию интегральной кривой на плоскость (x, y). Во всех точках характеристики функция u принимает одинаковые значения. Геометрически это означает, что линии уровня функции $u(x, y)$, являющейся решением уравнения, есть характеристики.

П р и м е р 6. Решить уравнение, описывающее простую волну (частный случай продольных колебаний стержня).

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + a(\varepsilon)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{a(\varepsilon)} = \frac{d\varepsilon}{0},$$

следовательно, $\varepsilon = C_1$.

Заметим, что коэффициент a зависит не от t и x, а только от ε. Поскольку вдоль интегральных кривых ε постоянно, уравнение характеристик

$$dt = \frac{dx}{a(\varepsilon)}$$

легко интегрируется, а сами характеристики

$$t - \frac{x}{a(\varepsilon)} = C_2$$

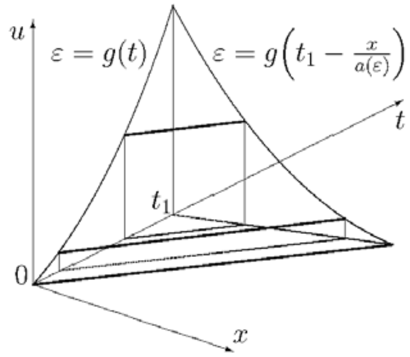

Рис. 7

— прямые в плоскости (x, y) (рис. 7). Следовательно,

$$\Phi\Big(\varepsilon, t - \frac{x}{a(\varepsilon)}\Big) = 0,$$

или

$$\varepsilon = f\Big(t - \frac{x}{a(\varepsilon)}\Big).$$

Произвольная функция f легко определяется, если при $x = 0$ задана функция $\varepsilon = g(t)$:

$$f\Big(t - \frac{0}{a(\varepsilon)}\Big) = g(t),$$

таким образом,

$$\varepsilon = g\Big(t - \frac{x}{a(\varepsilon)}\Big).$$

На рис. 7 показаны интегральная поверхность, соответствующая найденному решению, и профиль волны для момента $t = t_1$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка.

1. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} - x^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu.$

2. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} = u.$

3. $(x + y^2 + u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u.$

4. $(u^2 - y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} + y = 0.$

5. $\sin^2 x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{tg} u\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos^2 u.$

6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (x > 0).$

7. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x}.$

8. $2y^4\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\sqrt{u^2 + 1}.$

9. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}.$

10. $(u - y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy.$

11. $xy\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x - 2u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = yu.$

12. $(x^2 + y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0.$

13. $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - x)\dfrac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0.$

14. $(xu + y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x + yu)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 - u^2.$

15. $-x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xy - 2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = xu.$

16. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y.$

17. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + yu\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy\sqrt{u^2+1}.$

18. $(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y+u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y.$

19. $x^2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y.$

20. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2y + u.$

21. $e^x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = ye^x.$

22. $(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x-u)\dfrac{\partial u}{\partial y} + x - y = 0.$

23. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = y + 2u.$

24. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} - xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^u.$

25. $(y^3x - 2x^4)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u(x^3 - y^3).$

26. $(x+y)u\dfrac{\partial u}{\partial x} + (x-y)u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^2 - 2xy - x^2.$

27. $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xyu - 2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = xu.$

28. $(u-2x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (ux + uy + 2x - u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u.$

29. $(y+u)^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - x(y+2u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = xu.$

30. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{k}\sqrt{x^2+y^2},$ где k — константа.

Задача 2. Решить уравнение в частных производных первого порядка при заданных дополнительных условиях.

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy + u; \qquad y = \dfrac{1}{x}, \quad u = x^2.$

2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2; \qquad y = 1, \quad u = x^2.$

3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - xy; \qquad x = 2, \quad u = 1 + y^2.$

4. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u; \qquad u = y - 4, \quad x = 2.$

5. $xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + yu\dfrac{\partial u}{\partial y} = -xy; \qquad y = x^2, \quad u = x^3.$

6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2; \qquad y = -2, \quad u = x - x^2.$

7. $(y - u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u - x)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y; \qquad u = y = -x.$

8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (xu + y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u; \qquad x + y = 2u, \quad xu = 1.$

9. $(x - u)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u; \qquad x - y = 2, \quad u + 2x = 1.$

10. $xy^3\dfrac{\partial u}{\partial x} + x^2u^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = uy^3; \qquad x = -u^3, \quad y = u^2.$

11. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = x; \qquad x = 0, \quad u = y^2.$

12. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2; \qquad x = 2, \quad u = 1 + 2y + 3y^2.$

13. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2; \qquad y = a, \quad 2u = (x + a)^2,$ где a — константа.

14. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad u = x^2, \quad y = 1.$

15. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad u = -y, \quad x = 1.$

16. $u(x + u)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y(y + u)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0; \qquad u = \sqrt{y}, \quad x = 1.$

17. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu; \qquad x + y = 2, \quad yu = 1.$

18. $\operatorname{tg} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u; \qquad y = x, \quad u = x^3.$

19. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2(x - 3y); \qquad x = 1, \quad yu + 1 = 0.$

20. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y; \qquad y = 2u, \quad x = -3u.$

21. $(y + 2u^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2x^2u\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2; \qquad x = u, \quad y = x^2.$

22. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + yu\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0; \qquad x - y = 0, \quad x - yu = 1.$

23. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u; \qquad y = u, \quad x = 1.$

24. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y; \qquad x = 1, \quad u = y^2 + 1.$

25. $yu\dfrac{\partial u}{\partial x} + xu\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy; \qquad x = a, \quad y^2 + u^2 = a^2,$ где a — константа.

26. $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \qquad x = y, \quad u = x^2.$

27. $2xu\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2yu\dfrac{\partial u}{\partial y} = u^2 - x^2 - y^2; \qquad x^2 + y^2 = 1, \quad u = 0.$

28. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2; \qquad x = 1, \quad u = y^2 - 1.$

29. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \sqrt{u} = 0; \qquad x = 1, \quad \sqrt{y} + \sqrt{u} = 1.$

30. $(x - a)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u - c; \qquad x = a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}R,$
$(y - b)^2 + (u - c)^2 = \dfrac{R^2}{4},$ где a, b, c, R — константы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965.

2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.

3. *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

4. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966.

5. Сборник задач по математике для втузов: Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1986.

6. *Котельникова Л.П., Паршев Л.П.* Методические указания к домашнему заданию по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1987.

7. *Ганина Э.П., Котельникова Л.П., Паршев Л.П.* Методические указания к решению задач по курсу «Уравнения математической физики». М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1988.

СОДЕРЖАНИЕ